Conducción no estacionaria 1-D

Placa plana

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T = T_i \quad , t = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \, , x = 0$$

$$-\frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_\infty) \quad , x = L$$

Introduciendo el siguiente conjunto de variables adimensionales:

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \, , \; x^* = \frac{x}{L}$$

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad , Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

La ecuación de la energía adquiere la forma:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^2} = \frac{\partial \theta^*}{\partial F_0}$$

$$\theta = 1_i \quad , Fo = 0$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} = 0 \, , x^* = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -Bi\theta \quad , x^* = 1$$

La solución viene expresada de la siguiente manera

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\xi_n x^*) \exp(-\xi_n{}^2 Fo)$$

donde ξ_n corresponden a los autovalores del problema, los cuales vienen dados por: la solución de la siguiente ecuación trascendental:

$$\xi_n \tan(\xi_n) = Bi$$

La evaluación de la solución analítica es laboriosa porque requiere en primer lugar la determinación de los autovalores para después proceder a la evaluación de los coeficientes C_n,
Los cuales se determinan mediante,

$$C_n = \frac{2sen(\xi_n)}{\xi_n + sen(\ \xi_n)\cos(\xi_n)}$$

Para tiempos prolongados , la solución en serie converge muy rapidamente. De manera que con la evaluación de el primer término de la serie se logra buena exactitud.

Diagramas de Heissler

Precisamente, Heissler se dio a la tarea de graficar dichas soluciones con la evaluación del primer término, este análisis es válido para $Fo \geq 0.2$, el cual determina:

$$\theta \approx C_1 \cos(\xi_1 x^*) \exp(-\xi_1{}^2 Fo)$$

la temperatura en el centro de la placa,

$$\theta_0{}^* = C_1 \exp(-\xi_1{}^2 Fo)$$

La expresión anterior depende del número de Fourier, Fo y del número de Biot, Bi.

Para efectos de cálculo las constantes $C_1 y \xi_1$ se encuentran tabuladas en la Tabla 5.1 del libro de Incropera

Cálculo del calor total

Grober siguiendo la misma aproximación de Heiisler presentó en forma de diagrama las soluciones para el calor total, el cual viene dado por:

$$\frac{Q}{Q_\infty} = 1 - \frac{sen(\xi_1)}{\xi_1}\theta_0^*$$

Soluciones aproximadas para cilindro infinito y esfera

Cilindro infinito

$$\theta \approx C_1 \exp(-\xi_1{}^2 Fo) Jo(\xi_1 r^*)$$

$$\frac{Q}{Q_\infty} = 1 - \frac{2}{\xi_1}\theta_0^* J_1(\xi_1)$$

Esfera

$$\theta \approx C_1 \exp(-\xi_1{}^2 Fo) \frac{1}{\xi_1 r^*} sen(\xi_1 r^*)$$

$$\frac{Q}{Q_\infty} = 1 - \frac{3}{\xi_1^3} \theta_0^* [\sin(\xi_1) - (\xi \cos(\xi_1)]$$